Démonstration géométrique du théorème de Lang-Néron

Bruno Kahn

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE LANG-NÉRON

par

Bruno Kahn

Résumé. — On donne une démonstration “sans hauteurs" du théorème de Lang-Néron : si K/k est une extension de type fini régulière et A est une K-variété abélienne, le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k-trace de A au sens de Chow. La méthode fournit une expression du rang de ce groupe en fonction de ceux de certains groupes de Néron-Severi.

Abstract. — We give a proof without heights of the Lang-Néron theorem : if K/k is a regular extension of finite type and A is an abelian K-variety, the group $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ is finitely generated, where $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ denotes the K/k-trace of A in the sense of Chow. Our method computes the rank of this group in terms of certain ranks of Néron-Severi groups.

Soient K/k une extension de type fini régulière et A une K-variété abélienne. On se propose de donner une démonstration “sans hauteurs" du théorème de Lang-Néron :

Théorème 1 **([4])**. — *Le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k-trace de A au sens de Chow.*

(La démonstration de Lang et Néron est exposée dans le langage des schémas dans [**3**, App. B].)

On se ramène immédiatement au cas où k est algébriquement clos. Soit X un modèle lisse de K/k choisi de telle sorte que A se prolonge en un schéma abélien $p : \mathcal{A} \to X$.

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 11G10, 14C22, 14K30.

Lemme 1. — *La suite*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A) \to 0$$

est exacte, où j est l'inclusion de A dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. — On a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in\mathcal{A}^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Pic}(A) \arrow[r] & 0 \\
\bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte désirée, sauf l'exactitude en $\mathrm{Pic}(X)$. Celle-ci résulte du fait que p a une section. □

Lemme 2. — *Soit $A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{A})$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. Alors $j^*A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)$, où $\hat{A} = \mathrm{Pic}^0_{A/k}$ est la variété abélienne duale de A.*

Démonstration (cf. [**2**, Lect. 1, lemme 1.3]*)*. — Par définition, $A^1(X)$ est engendré via les correspondances algébriques par des jacobiennes de courbes, donc le lemme résulte de la définition de la K/k-trace. □

Lemme 3. — *On a $j^*A^1(\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)$, et une suite exacte scindée*

$$0 \to \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A)/\mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k) \to 0$$

où NS désigne le groupe des cycles de codimension 1 modulo l'équivalence algébrique.

Démonstration. — Le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^1(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^1(X) \arrow[r] \arrow[u, "p_A^*"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{NS}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p_N^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

fournit, via le lemme 1 et compte tenu du fait que p a une section, une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Coker}\, p_A^* \to \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Coker}\, p_N^* \to 0.$$

Par le lemme 2, $\operatorname{Coker} p_A^* \subset \operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$. D'après [**3**, th. 3], $\operatorname{Coker} p_N^*$ est de type fini. Le groupe $\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)/\operatorname{Coker} p_A^*$, divisible et de type fini, est donc nul. On obtient donc un isomorphisme $\operatorname{Pic}(A)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} p_N^*$, comme désiré. □

Le théorème 1 résulte du lemme 3 et de la génération finie de $\operatorname{NS}(\mathcal{A})$, déjà utilisée dans sa démonstration. □

On obtient aussi :

Corollaire 1. — *$\operatorname{rg}(\hat{A}(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)) = \rho(\mathcal{A}) - \rho(X) - \rho(\hat{A})$, où $\rho(Y) := \operatorname{rg} \operatorname{NS}(Y)$ pour une variété lisse Y. (Noter que $\rho(\hat{A})$ est calculé "sur K".)* □

Remarque 1. — Cette démonstration a une interprétation agréable en termes de 1-motifs, dans le cadre développé dans [**1**]. Supposons seulement k parfait ; soit $\mathcal{M}_1$ la catégorie des 1-motifs de Deligne sur k et soit $D^b(\mathcal{M}_1)$ sa catégorie dérivée au sens de [**1**, déf. 1.5.2]. Soient $\operatorname{LAlb}(X)$ et $\operatorname{LAlb}(\mathcal{A})$ les objets de $D^b(\mathcal{M}_1)$ associés à X et $\mathcal{A}$ par [**1**, déf. 8.1.1], et soit $\operatorname{LAlb}(\mathcal{A}/X)$ la fibre du morphisme $p_* : \operatorname{LAlb}(\mathcal{A}) \to \operatorname{LAlb}(X)$. D'après [**1**, cor. 10.2.3], on a, pour toute k-variété lisse Y :

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y) = \begin{cases} [\mathbf{Z}[\pi_0(Y)] \to 0] & \text{si } i = 0 \\ [0 \to \mathcal{A}^0_{Y/k}] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to \operatorname{NS}^*_{Y/k}] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pi_0(Y), \mathcal{A}^0_{Y/k}$ et $\operatorname{NS}^*_{Y/k}$ désignent respectivement l'ensemble des composantes connexes géométriques, la variété d'Albanese et le dual de Cartier du groupe de Néron-Severi (au sens ci-dessus) de Y ; les $\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y)$ sont calculés par rapport à une t-structure convenable sur $D^b(\mathcal{M}_1)$. Les résultats précédents et un calcul facile de suite exacte donnent alors

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(\mathcal{A}/X) = \begin{cases} [0 \to \operatorname{Im}_{K/k} A] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to M^*] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\operatorname{Im}_{K/k} A$ est la K/k-image de A et $M(\bar{k}) := \operatorname{Pic}(A_{\bar{k}})/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k})$ est une extension

$$0 \to \hat{A}(\bar{k}K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k}) \to M(\bar{k}) \to \operatorname{NS}(A_{\bar{k}K}) \to 0$$

$\bar{k}$ étant une clôture algébrique de k.

Remarque 2. — Revenons au cas où k est algébriquement clos, et soit l un nombre premier différent de la caractéristique de k. En jouant avec la suite spectrale de Leray relative à p, on obtient facilement une injection

$$f : (\hat{A}(K)/\operatorname{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)) \otimes \mathbf{Z}_l \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, j_*T_l(\hat{A})).$$

Si k est la clôture algébrique d'un corps k_0 de type fini sur son sous-corps premier, on a évidemment

$$\operatorname{Im} f \subset \bigcup_L H^1_{\text{ét}}(X, j_*T_l(\hat{A}))^{Gal(k/L)}$$

où L décrit les extensions finies de k_0.

Références

[1] L. Barbieri-Viale, B. Kahn *On the derived category of* 1*-motives*, prépublication, 2006.

[2] S. Bloch Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Series IV, 1980.

[3] B. Kahn *Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique* (avec un appendice de Marc Hindry), Bull. SMF **134** (2006), 395–415.

[4] S. Lang, A. Néron. *Rational points of abelian varieties over function fields*, Amer. J. Math. **81** (1959), 95–118.

2 mars 2007

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France • *E-mail :* kahn@math.jussieu.fr